Clasa a XII-a, soluţii

1. Fie $(GL_2(\mathbb{C}), \cdot)$ grupul multiplicativ al matricelor inversabile de ordin 2 cu elemente numere complexe şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule. Demonstraţi că:

a) Există un morfism surjectiv de la $GL_2(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}^*$, dar nu există niciun morfism surjectiv de la $\mathbb{C}^*$ la $GL_2(\mathbb{C})$.

b) Există un morfism injectiv de la $\mathbb{C}^*$ la $GL_2(\mathbb{C})$, dar nu există niciun morfism injectiv de la $GL_2(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}^*$.

Dorel Miheţ

Soluţie a) Exemplu: $f : GL_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*, f(A) = \det A$ (se ştie că $\det AB = detA \cdot \det B$ pentru orice matrice A, B şi f este surjectivă pentru că pentru $y \in \mathbb{C}^*$ dat, $f(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = y$).
1,5 puncte

Pentru partea a doua vom exploata faptul că înmulţirea numerelor complexe este comutativă, iar înmulţirea matricelor nu este comutativă. Presupunem, prin reducere la absurd, că există un morfism surjectiv $f : \mathbb{C}^* \to GL_2(\mathbb{C})$. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ din $GL_2(\mathbb{C})$, alese astfel încât $A \cdot B \neq B \cdot A$. Din surjectivitate, $A = f(x), B = f(y)$ pentru anumite numere complexe nenule x, y, iar din condiţia de morfism $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = A \cdot B$ şi $f(y \cdot x) = B \cdot A$, deci $A \cdot B = B \cdot A$, în contradicţie cu alegerea făcută. *2 puncte*

b) Exemplu: $f : \mathbb{C}^* \to GL_2(\mathbb{C}), f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Evident f este injectivă şi $f(x \cdot y) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{C}^*$. *1,5 puncte*

Presupunem, prin reducere la absurd, că există un morfism injectiv $f : GL_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ şi fie A, B matricele de la punctul a) şi $a = f(A), b = f(B)$. Deoarece $A \cdot B \neq B \cdot A$, iar f este injectivă, rezultă că $f(A \cdot B) \neq f(B \cdot A)$. Însă $f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B) = ab$ şi $f(B \cdot A) = ba$ implică $f(A \cdot B) = f(B \cdot A)$. Contradicţia la care am ajuns demonstrează că nu există morfisme injective de la $GL_2(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}^*$. *2 puncte*

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup, e elementul său neutru şi $f : G \to G$ o funcţie cu următoarea proprietate:

$$\text{dacă } x_1x_2x_3 = e = y_1y_2y_3 \Longrightarrow f(x_1)f(x_2)f(x_3) = f(y_1)f(y_2)f(y_3).$$

Arătaţi că există $a \in G$ astfel încât funcţia $g(x) = af(x)$ să fie un morfism de grupuri.

Soluţie g morfism $\Longrightarrow g(e) = e \Longrightarrow af(e) = e \Longrightarrow a = f(e)^{-1}$. *1 punct*

$$xex^{-1} = e = exx^{-1} \Longrightarrow f(x)f(e)f(x^{-1}) = f(e)f(x)f(x^{-1}).$$

Simplificând la dreapta cu $f(x^{-1})$ obţinem

$$f(x)f(e) = f(e)f(x), \quad \forall x \in G. \qquad \textit{1,5 puncte}$$

Înmulţind relaţia de mai sus, la stânga şi la dreapta cu $f(e)^{-1}$ obţinem

$$f(e)^{-1}f(x) = f(x)f(e)^{-1} \ \ \forall x \in G. \qquad \textit{1,5 puncte}$$

$$e(xy)(y^{-1}x^{-1}) = e = xy(y^{-1}x^{-1}) \Longrightarrow f(e)f(xy)f(y^{-1}x^{-1}) = f(x)f(y)f(y^{-1}x^{-1})$$

$$\Longrightarrow f(e)f(xy)f(e) = f(x)f(y)f(e) \Longrightarrow f(e)f(xy) = f(x)f(y)$$

$$\Longrightarrow f(xy) = f(e)^{-1}f(x)f(y) \Longrightarrow f(e)^{-1}f(xy) = f(e)^{-1}f(e)^{-1}f(x)f(y)$$

$$= f(e)^{-1}f(x)f(e)^{-1}f(y) \Longrightarrow g(xy) = g(x)g(y). \qquad \textit{3 puncte}$$

3. Fie I un interval deschis şi $f : I \to (0, \infty)$ o funcţie convexă, strict crescătoare şi de două ori derivabilă pe I. Arataţi că:

(i) $f'(x) \neq 0$, pentru oricare $x \in I$;

(ii) dacă $x, y \in I$, $x < y$,

$$\int_x^y \sqrt{\frac{f''(t)}{f(t)}}dt \leq \sqrt{\ln\frac{f'(y)}{f'(x)} \cdot \ln\frac{f(y)}{f(x)}}.$$

Mircea Balaj

Solutie (i) Deoarece f este convexă, f' este monoton crescătoare. Presupunem că pentru un $x_0 \in I$, $f'(x_0) = 0$. Rezultă că $f' \leq 0$ pe intervalul $I_s = I \cap (-\infty, x_0]$ şi $f' \geq 0$ pe $I_d = I \cap [x_0, \infty)$. Deoarece f este strict monotonă, f' nu-şi schimbă semnul pe I, deci, pe unul dintre intervalele I_s, I_d, $f' \equiv 0$. Evident, aceasta contrazice strict monotonia lui f. *3 puncte*

(ii) Se arată uşor că, în condiţiile date, $\frac{f(y)}{f(x)} > 0$, $\frac{f'(y)}{f'(x)} > 0$. Fie

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{dacă } f \text{ este strict crescătoare} \\ -1, & \text{dacă } f \text{ este strict descrescătoare}\ . \end{cases}$$

Utilizând forma integrală a inegalităţii Cauchy-Schwarz, obţinem:

$$\Big(\int_x^y \sqrt{\frac{f''(t)}{f(t)}}dt\Big)^2 = \Big(\int_x^y \sqrt{\frac{f''(t)}{\varepsilon f'(t)}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon f'(t)}{f(t)}}dt\Big)^2$$

2 puncte

$$\leq \int_x^y \frac{f''(t)}{\varepsilon f'(t)}dt \int_x^y \frac{\varepsilon f'(t)}{f(t)}dt = \ln\frac{f'(y)}{f'(x)} \cdot \ln\frac{f(y)}{f(x)}.$$

2 puncte

4. Arătaţi că nu există funcţii continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea: $\int_0^{f(x)} f(t)dt = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dorel Miheţ

Soluţie Considerăm $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. *0,5 puncte*

Presupunem, prin reducere la absurd, că există o astfel de funcţie f. *0,5 puncte*

Deoarece $1_{\mathbb{R}}$ este bijectivă, *0,5 puncte*

f este injectivă. *0,5 puncte*

Rezultă că f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$, deci există $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. *0,5 puncte*

Dacă $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x=\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(f(x))=F(l)\in\mathbb{R}$, absurd. *1 punct*

Deci $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ şi din cauza monotoniei una dintre limite este $+\infty$, iar cealaltă $-\infty$. *0,5 puncte*

Aşadar f este surjectivă, *0,5 puncte*

deci bijectivă *0,5 puncte*

şi atunci $F=1_{\mathbb{R}}\circ f^{-1}$ este injectivă, deci strict monotonă pe $\mathbb{R}$. Rezultă că $F'=f$ nu îşi schimbă semnul pe $\mathbb{R}$, fapt care contrazice surjectivitatea funcţiei f. *1 punct*

Contradicţia la care am ajuns ne arată că nu există nicio funcţie continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^{f(x)} f(t)dt=x$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$. *0,5 puncte*