Clasa a XI-a, soluţii

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & ... & n+2 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ n & n+1 & n+2 & ... & 2n-1 \end{pmatrix}$.

Din fiecare linie a matricei A se alege câte un număr, astfel încât numerele alese să facă parte din coloane diferite.

Să se demonstreze că suma acestor numere este independentă de modul în care se face alegerea.

Solutie Pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ avem $a_{ij} = i + j - 1$. *3 puncte*

Numerele alese $a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{nj_n}$ au proprietatea că indicii $j_1, j_2, ..., j_n$ formează o permutare a numerelor $1, 2, ..., n$. *1,5 puncte*

Atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} (i + j_i - 1) = \sum\limits_{i=1}^{n} i + \sum\limits_{i=1}^{n} j_i - \sum\limits_{i=1}^{n} 1 = (1 + 2 + ... + n) + (1 + 2 + ... + n) - n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$. *2,5 puncte*

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demonstraţi că dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ şi $\beta \in \mathbb{C}$ astfel incât $(A - \beta I_n)^k = 0_n$, atunci pentru orice $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\beta\}$ matricea $A - \lambda I_n$ este inversabilă.

Solutie Arătăm că $A - \lambda I_n$ are un polinom anulant cu termenul liber nenul. În acest scop scriem matricea $A - \beta I_n$ sub forma $A - \lambda I_n + (\lambda - \beta) I_n$ şi folosim ipoteza $(A - \beta I_n)^k = 0_n$. *1,5 puncte*

Deoarece $A - \lambda I_n$ şi $(\lambda - \beta) I_n$ comută, folosind formula binomului obţinem:

$$(A - \beta I_n)^k = (A - \lambda I_n + (\lambda - \beta) I_n)^k =$$

$$(A - \lambda I_n)^k + C_k^1 (\lambda - \beta)(A - \lambda I_n)^{k-1} + ... + C_k^{k-1} (\lambda - \beta)^{k-1} (A - \lambda I_n) + (\lambda - \beta)^k I_n = 0_n.$$

3 puncte

Rezultă că $(A - \lambda I_n) \cdot \frac{-1}{(\lambda-\beta)^k} ((A - \lambda I_n)^{k-1} + ... + C_k^{k-1} (\lambda - \beta)^{k-1} I_n) = I_n$, deci $A - \lambda I_n$ este inversabilă şi are inversa $\frac{-1}{(\lambda-\beta)^k} ((A - \lambda I_n)^{k-1} + ... + C_k^{k-1} (\lambda - \beta)^{k-1} I_n)$. *2,5 puncte*

3) Fie a un număr real şi $f, g : [a, \infty) \to [a, \infty)$.

a) Demonstraţi că dacă g este continuă şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(f(x)) = \infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

b) Rămâne proprietatea de la a) adevărată dacă intervalul $[a, \infty)$ se înlocuieşte cu (a, ∞)?

Dorel Miheţ

Soluţie a) Presupunem, prin reducere la absurd, că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq \infty$. Atunci există $M > a$ cu proprietatea că pentru orice $\delta > 0$ există $x > \delta$ cu $a \leq f(x) \leq M$. *2 puncte*

Deoarece funcţia g este continuă pe intervalul închis $[a, M]$, ea este mărginită şi îşi atinge marginile pe acest interval, deci există $M_1 > 0$ astfel încât $0 \leq g(y) \leq M_1, \forall y \in [a, M]$. *2 puncte*

Aşadar, există $M_1 > 0$ cu proprietatea că pentru orice $\delta > 0$ există $x > \delta$ cu $g(f(x)) \leq M_1$, în contradicţie cu ipoteza $\lim\limits_{x\to\infty} g(f(x)) = \infty$. *1 punct*

b) Nu, după cum arată exemplul $f, g : (a, \infty) \to (a, \infty), f(x) = g(x) = a + \frac{1}{x-a}$. *2 puncte*

4. Fie $f : [a, b] \to [a, b]$ o funcţie continuă. Arătaţi că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ cu următoarea proprietate:

pentru orice $x \in [a, b]$ care satisface relaţia $| x - f(x) | < \delta$, există un punct fix u a lui f astfel încât $| x - u | < \varepsilon$ ($u \in [a, b]$ se numeşte punct fix pentru f, dacă $f(u) = u$).

Dan Stefan Marinescu, Mihai Petru Monea

Soluţie Notăm cu $Fix(f)$ mulţimea punctelor fixe ale lui f.

$$f \text{ continuă} \Longrightarrow Fix(f) \neq \emptyset. \qquad \textit{1 punct}$$

Presupunem prin reducere la absurd că există $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ există $x \in [a, b]$ cu $| x - f(x) | < \delta$ şi $| x - u | \geq \varepsilon$, oricare ar fi $u \in Fix(f)$. *1 punct*

Alegem $\delta = \frac{1}{n}$. Pentru fiecare $n \geq 1$, există $x_n \in [a, b]$ astfel încât $| f(x_n) - x_n | < \frac{1}{n}$ şi $| x_n - u | \geq \varepsilon$, oricare ar fi $u \in Fix(f)$. *1 punct*

Şirul $\{x_n\}$ fiind mărginit, conţine un subşir $\{x_{n_k}\}$ convergent. Notăm cu v limita acestui subşir. *1 punct*

Funcţia f este continuă, deci $\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(v)$. Atunci

$$| f(v) - v | \leq | f(v) - f(x_{n_k}) | + | f(x_{n_k}) - x_{n_k} | + | x_{n_k} - v |$$

$$\leq | f(v) - f(x_{n_k}) | + \frac{1}{n_k} + | x_{n_k} - v | . \qquad \textit{1,5 puncte}$$

Prin trecere la limită pentru $k \longrightarrow \infty$ rezultă $f(v) = v$, deci $v \in Fix(f)$. *1 punct*

Deoarece $x_{n_k} \longrightarrow v$, rezultă că există un k_0 astfel încât pentru orice $k \geq k_0$, avem

$$| x_{n_k} - v | < \varepsilon \ \text{ contradicţie.} \qquad \textit{0,5 puncte}$$