Clasa a X-a, soluţii

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural, $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale, toate din intervalul $(0, 1)$ sau toate din intervalul $(1, \infty)$ şi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ numere reale.

Notăm $A = a_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot a_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot ... \cdot a_n^{\min(\alpha_n,\beta_n)}$, $B = a_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot a_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot ... \cdot a_n^{\max(\alpha_n,\beta_n)}$, $C = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot a_n^{\alpha_n}$, $D = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot a_n^{\beta_n}$.

Demonstraţi că $A + B \geq C + D$. Când are loc egalitatea?

Dorel Miheţ

Soluţie Deoarece $min(a, b) + max(a, b) = a + b$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea $A \cdot B = C \cdot D$. *2,5 puncte*

Aşadar trebuie să demonstrăm că $A + \frac{CD}{A} \geq C + D$, inegalitate echivalentă cu $A^2 - A(C + D) + CD \geq 0$, adică cu $(A - C)(A - D) \geq 0$, inegalitate care rezultă din monotonia funcţiei exponenţiale. *2 puncte*

Egalitatea are loc când $A = C$ sau $A = D$. Folosind din nou monotonia funcţiei exponenţiale deducem că $A = C$ dacă şi numai dacă $min(\alpha_i, \beta_i) = \alpha_i \ \ \forall i$, adică $\beta_i \geq \alpha_1 \ \ \forall i$, iar $A = D$ dacă şi numai dacă $\alpha_i \geq \beta_i \ \forall i$, deci egalitatea are loc în una din cele două situaţii. *2,5 puncte*

Observaţie. În cazul particular când numerele $a_1, ..., a_n$ sunt numere prime, iar numerele $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n$ sunt numere naturale, inegalitatea se reduce la $(a, b) + [a, b] \geq a + b$, cu egalitate când a divide b sau b divide a.

2. Există funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(x)) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $g(f(x)) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$?

Soluţie Deoarece funcţia putere cu exponent impar definită pe $\mathbb{R}$ este bijectivă, din egalitatea $g(f(x)) = x^3, \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este injectivă. *1 punct*

Fie $x \in \mathbb{R}$. Folosind asociativitatea operaţiei de compunere a funcţiilor, deducem că $f \circ g \circ f(x)$ este pe de o parte $f(x^3)$ şi pe de altă parte $f^2(x)$.

Aşadar $f(x^3) = f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$, *3 puncte*

deci $f(-1) = f^2(-1), f(0) = f^2(0), f(1) = f^2(1)$, ceea ce înseamnă că $f(-1), f(0)$ şi $f(1)$ iau numai una din valorile 0 sau 1, contrazicând astfel injectivitatea funcţiei f.

2 puncte

Prin urmare nu există funcţii f şi g cu proprietăţile din enunţ. *1 punct*

3. a) Determinaţi numerele complexe z de modul 1 pentru care $| 1 + z |=| 1 + z^2 |$.

b) Fie $D = \{z \in \mathbb{C}, | z |= 1\}$ şi

$$f : D \to [0, \infty), f(z) = \max(| 1 + z |, | 1 + z^2 |).$$

Aflaţi $\max\limits_{z \in D} f(z)$ şi $\min\limits_{z \in D} f(z)$.

Dorel Miheţ

Soluţie a) *Soluţie algebrică.* Dacă $| z |= 1$ şi $| 1 + z |=| 1 + z^2 |$, atunci $z \neq -1$ şi $\frac{z^2+1}{z+1} \cdot \overline{\frac{z^2+1}{z+1}} = 1$. Ţinând seama de egalitatea $\bar{z} = \frac{1}{z}$, această egalitate se transformă succesiv în:

$$\frac{z^2+1}{z+1}\cdot\frac{z^2+1}{z+1} \;=\; z \iff (z^2+1)^2 = z(z+1)^2 \iff z^4-z^3-z+1=0,$$

2 puncte

de unde obţinem că z este rădăcină de ordinul trei a unităţii. *0,5 puncte*

Cum toate cele trei rădăcini verifică egalitatea $\mid 1+z \mid=\mid 1+z^2 \mid$, ele sunt numerele cerute la a). *0,5 puncte*

Soluţie trigonometrică Căutăm $\alpha \in [0,2\pi)$ astfel ˆincˆat $(1+cos\alpha)^2+sin^2\alpha = (1+cos2\alpha)^2+cos^2 2\alpha$, ecuaţie care se reduce la $cos\alpha = cos2\alpha, \alpha \in [0,2\pi)$, deci $2\alpha = 2n\pi \pm \alpha, \alpha \in [0,2\pi)$, de unde obţinem $\alpha \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$, adică $z = cos\alpha + isin\alpha$ este o rădăcină de ordinul trei a unităţii.

b) Folosind inegalitatea triunghiului deducem că pentru orice $z \in D$ au loc inegalităţile $\mid z+1 \mid \le \mid z \mid +1 \le 2$ şi la fel $\mid z^2+1 \mid \le 2$. Rezultă că $\max\limits_{z\in D} f(z) \le 2$ *0,5 puncte*

şi cum $f(1)=2$, $\max\limits_{z\in D} f(z) = 2$. *0,5 puncte*

Să observăm apoi că dacă $z=\varepsilon$ este o rădăcină de ordinul trei a unităţii diferită de 1, atunci $f(z) =\mid 1+\varepsilon \mid=\mid \varepsilon^2 \mid = 1$. *1 punct*

Demonstrăm că acesta este minimul lui f pe D.

Soluţie algebrică. Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $\mid z \mid= 1$ şi $M = \max\{\mid z+1 \mid, \mid z^2+1 \mid\}$. Atunci $\mid z+1 \mid \le M, \mid z^2+1 \mid \le M$, iar

din egalitatea $(z+1)^2-(z^2+1) = 2z$ rezultă că $\mid z+1 \mid^2 + \mid z^2+1 \mid \ge 2 \mid z \mid = 2$, deci $M \ge 1$ ($\mid z+1 \mid < 1$ şi $\mid z^2+1 \mid < 1$ implică $\mid z+1 \mid^2 + \mid z^2+1 \mid < 2$).

Prin urmare $f(z) \ge 1, \forall z \in D$ *1,5 puncte*

şi cum $f(\varepsilon)=1$, obţinem că că valoarea minimă a lui $f(z)$ este 1. *0,5 puncte*

Soluţie trigonometrică. Inegalitatea $f(z) \ge 1 \forall z \in D$ rezultă trigonometric dacă observăm că $cos\alpha < \frac{1}{2} \implies cos2\alpha = 1-2cos^2\alpha > 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Observaţie: $\min\max\limits_{z\in\mathbb{C}}\{\mid z+1 \mid, \mid z^2+1 \mid\} = \sqrt{3-\sqrt{5}}$.

4. Arătaţi că dacă o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface

$$f(x+y)f(x-y) \le f^2(x) - f^2(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

atunci:

(a) f este impară.
(b) $f(x+y)f(x-y) = f^2(x)-f^2(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$.

Soluţie (a) Luând $x=y=0$ obţinem $f^2(0) \le 0$, deci $f(0)=0$. *0,5 puncte*

Luând $x=-y$ obţinem $0 \le f^2(y) - f^2(-y)$, deci

$$f^2(-y) \le f^2(y). \tag{2}$$

0,5 puncte

Schimbând în (2) y cu $-y$, obţinem $f^2(y) \le f^2(-y)$, deci $f^2(y) = f^2(-y)$. *1 punct*

Aşadar, pentru fiecare $y \in \mathbb{R}$ avem fie

$$f(-y) = -f(y) \tag{3}$$

sau

$$f(-y) = f(y).$$

Vom arăta că pentru orice $y \in \mathbb{R}$ are loc (3). Să presupunem că pentru un $y_0 \in \mathbb{R}$, $f(-y_0) = f(y_0)$. Luând în (1), $x = 0$ şi $y = y_0$, vom avea

$$f(y_0)f(-y_0) \leq -f^2(y_0), \qquad \textit{1 punct}$$

de unde

$$f^2(y_0) \leq -f^2(y_0) \Longrightarrow f(y_0) = 0 = -f(-y_0),$$

deci (3) are loc. *1,5 puncte*

(b) Din (1) si (3) obţinem

$$\begin{aligned} f^2(y) &\leq f^2(x) - f(x+y)f(x-y) = f^2(x) + f(x+y)f(y-x) \\ &\leq f^(x) + f^2(y) - f^2(x) = f^2(y). \qquad \textit{2 puncte} \end{aligned}$$

Astfel avem $f((x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y)$. *0,5 puncte*