Clasa a IX-a, soluţii

1. Fie ABC un triunghi, H ortocentrul său, O centrul cercului circumscris, M mijlocul lui BC şi F piciorul înălţimii din A Dacă $HOMF$ este un dreptunghi cu laturile $HO = 11$, $OM = 5$, calculaţi lungimea lui BC.

Soluţia I Se ştie că $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ *1 punct*
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.. *2 puncte*
$\Rightarrow AH = 2OM = 10.$ *1 punct*
$\Rightarrow OB = OA = \sqrt{AH^2 + HO^2} = \sqrt{221}.$ *1,5 puncte*
$\Rightarrow BC = 2BM = 2\sqrt{OB^2 - OM^2} = 28.$ *1,5 puncte*

Soluţia II Fie G centrul de greutate al triunghiului. Se ştie că punctele O, G, H sunt pe o dreaptă (dreapta lui Euler) şi $HG = 2GO$. Din asemănarea triunghiurilor GOM şi GHM se obţine $AH = 2OM = 10$. Mai departe, demontraţia este similară cu precedenta.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$. Arătaţi ca există $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ pentru care $\sqrt{n^3 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{N}$.

Soluţie Notăm $P(n) = n^3 + an^2 + bn + c$. Presupunem, prin reducere la absurd, că $P(1), P(2), P(3)$ şi $P(4)$ sunt pătrate perfecte. *1 punct*
Observăm că $P(3) - P(1) = 26 + 8a + 2b$ şi $P(4) - P(2) = 56 + 12a + 2b$ sunt pare, deci $P(1)$ şi $P(3)$ şi de asemenea $P(2)$ şi $P(4)$ au aceeaşi paritate. *2 puncte*
Cum un pătrat perfect impar este de forma $4k + 1$, iar un pătrat perfect par este de forma $4k$, rezultă că diferenţa a două pătrate perfecte de aceeaşi paritate este multiplu de 4. *1 punct*
Aşadar $26+8a+2b$ şi $56+12a+2b$ se divid cu 4. ˆInsă dacă b este par, atunci $26+8a+2b$ nu se divide cu 4, iar dacă b este impar, atunci $56+12a+2b$ nu se divide cu 4. *3 puncte*
Contradicţia la care am ajuns ne arată că cel puţin unul dintre numerele $P(1), P(2), P(3), P(4)$ nu este pătrat perfect, ceea ce trebuia demonstrat.

3. Fie $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, cu $a_1 \le a_2, b_1 \le b_2$. Demonstraţi că dacă inegalitatea:

$$|x - a_1| + |x - a_2| \le |x - b_1| + |x - b_2|$$

are loc pentru $x = b_1$ şi $x = b_2$, atunci
a) $b_1 \le a_1$ şi $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$.
b) $|x - a_1| + |x - a_2| \le |x - b_1| + |x - b_2|, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dorel Miheţ

Soluţie a) Deoarece inegalitatea este adevărată pentru $x = b_1$ şi $x = b_2$, rezultă că

(1) $$|b_1 - a_1| + |b_1 - a_2| \le b_2 - b_1,$$ *0,5 puncte*

(2) $$|b_2 - a_1| + |b_2 - a_2| \le b_2 - b_1,$$ *0,5 puncte*

Presupunem, prin reducere la absurd, că $a_1 < b_1$. Din (2) rezultă că $b_2 - a_1 + |b_2 - a_2| \le b_2 - b_1$, deci $|b_2 - a_2| \le a_1 - b_1 < 0$, ceea ce este absurd. *0,5 puncte*
De asemenea, $a_2 \le b_2$, deoarece în caz contrar, din (1) ar rezulta $|b_1 - a_1| + a_2 - b_1 \le b_2 - b_1$, deci $|b_1 - a_1| \le b_2 - a_2 < 0$. *0,5 puncte*
Aşadar numerele a_1, a_2, b_1, b_2 sunt ordonate astfel: $b_1 \le a_1 \le a_2 \le b_2$. *0,5 puncte*

Înlocuind în inegalităţile (1) şi (2), $|b_1 - a_1|$ şi $|b_2 - a_2|$ cu $a_1 - b_1$ şi $b_2 - a_2$ obţinem respectiv $a_1 - b_1 + a_2 - b_1 \leq b_2 - b_1$, adică $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$ şi $b_2 - a_1 + b_2 - a_2 \leq b_2 - b_1$, adică $b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2$, de unde deducem că $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. *2 puncte*

b) Ţinând seama de ordonarea numerelor a_1, a_2, b_1, b_2 vom analiza fiecare din cazurile: 1) $x \leq b_1$; 2) $x \in [b_1, a_1]$; 3) $x \in [a_1, a_2]$; 4) $x \in [a_2, b_2]$; 5) $x \geq b_2$.

În cazul 1) $|x - a_1| = a_1 - x$, $|x - a_2| = a_2 - x$, $|x - b_1| = b_1 - x$, $|x - b_2| = b_2 - x$, deci inegalitatea $|x - a_1| + |x - b_1| \leq |x - b_1| + |x - b_2|$ se reduce la $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$, care este adevărată.

Cazul 5) este similar, reducându-se la $b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2$.

În cazul 2) avem de demonstrat că $a_1 - x + a_2 - x \leq x - b_1 + b_2 - x$, adică $a_1 + a_2 \leq b_2 - b_1 + 2x$, care este adevărată, deoarece $b_2 - b_1 + 2x \geq b_2 - b_1 + 2b_1 = b_1 + b_2$.

Dacă $x \in [a_1, a_2]$ (cazul 3)), inegalitatea se reduce la $a_2 - a_1 \leq b_2 - b_1$ care este adevărată din ordonare, iar dacă $x \in [a_2, b_2]$ trebuie arătat că $2x - a_1 - a_2 \leq b_2 - b_1$, care se reduce la $2x \leq 2b_2$, dacă ţinem seama de egalitatea $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$.

0,5 puncte pentru fiecare din cele 5 cazuri

4. a) Arătaţi că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b, d > 0$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

b) Determinaţi cel mai mic $n \in \mathbb{N}^*$ cu următoarea proprietate: există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{2018}{2019} < \frac{k}{n} < \frac{2019}{2020}.$$

Soluţie a) Demonstraţie elementară. *2 puncte*

b) Din (a), $\frac{2018}{2019} < \frac{4037}{4039} < \frac{2019}{2020}$. *1,5 puncte*

Vom arăta că $n = 4039$ este cel mai mic număr natural care satisface condiţia problemei.

Din

$$\frac{2018}{2019} < \frac{k}{n} < \frac{2019}{2020},$$

rezultă

$$1 - \frac{2019}{2020} < 1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{2018}{2019} \Longleftrightarrow \frac{1}{2020} < \frac{n-k}{n} < \frac{1}{2019}.$$ *1,5 puncte*

Dacă am avea $n - k = 1$, ar rezulta $n \in (2019, 2020)$; contradicţie. *1 punct*

Deci, $n - k \geq 2$. Din $\frac{n-k}{n} < \frac{1}{2019}$, rezultă $n > 2019(n-k) \geq 2019 \cdot 2$. Deci $n \geq 4039$. *1 punct*