Concursul de Matematică „Gheorghe S. Nadiu”

Ediţia a III - a, 7. 12. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

Problema 1. Să se determine funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea

$$\left(1+x^2\right)\cdot f(x)=f(\operatorname{arctg}x),\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

Varga Csaba

Rezolvare. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Din $f(x)=\dfrac{f(\operatorname{arctg}x)}{1+x^2}$, rezultă că $F(x)=F(\operatorname{arctg}x)+c$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$, egalitate ce este adevărată doar pentru $c=0$. Aşadar,

$$F(x)=F(\operatorname{arctg}x),\forall\ x\in\mathbb{R}.\qquad (\mathbf{3\ p})$$

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin

$$x_0=a\in\mathbb{R}\text{ şi }x_{n+1}=\operatorname{arctg}x_n,\ \forall\ n\in\mathbb{N}$$

şir care este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$ $\quad$ (**2 p**)
Deoarece $F(a)=F(x_n)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, din continuitatea lui F obţinem că

$$F(a)=F\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\Rightarrow F(a)=F(0).\qquad (\mathbf{1\ p})$$

Aşadar, $F(x)=F(0),\forall\ x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=0,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$ (**1 p**)

Problema 2. Să se calculeze

$$\int\frac{x^n+n!\cdot\left(f(x)-f'(x)\right)}{e^x+f(x)+1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}}\,dx,\quad x>0$$

unde $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ este o funcţie derivabilă, iar $n\in\mathbb{N}^*$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, G.M. 11/1999

Rezolvare. Dacă $g_n(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}$, atunci

$$g_n(x)-g_n'(x)=\frac{x^n}{n!}\Rightarrow x^n=n!\cdot\left(g_n(x)-g_n'(x)\right).\qquad (\mathbf{3\ p})$$

Astfel, avem:

$$\begin{aligned}
I &= \int\frac{n!\cdot\left(g_n(x)-g_n'(x)\right)+n!\cdot\left(f(x)-f'(x)\right)}{e^x+f(x)+g_n(x)}\,dx\\
&= n!\cdot\int\left(1-\frac{e^x+f'(x)+g_n'(x)}{e^x+f(x)+g_n(x)}\right)dx\qquad (\mathbf{2\ p})\\
&= n!\cdot\left(x-\ln\left(e^x+f(x)+g_n(x)\right)\right)\qquad (\mathbf{2\ p})
\end{aligned}$$

Problema 3. Se consideră o lege de compoziţie asociativă (notată multiplicativ) definită pe mulţimea nevidă G. Să se arate că dacă pentru orice triplet $(a,b,c) \in G^3$, există un element $x \in G$, astfel încât $axb = c$, atunci $(G,\cdot)$ este un grup.

L. Panaitopol, G.M. 4/1991

Rezolvare. Vom arăta existenţa elementului neutru şi că toate elementele lui G sunt inversabile.
Fie $a \in G$, un element fixat. Din ipoteză, pentru $(a,a,a) \in G^3$, există un element $x_0 \in G$, astfel încât $ax_0a = a$. (**1 p**) Dacă g este un element arbitrar din G, atunci pentru $(a,a,g) \in G^3$, există un element $x \in G$, astfel încât $axa = g$. (**1 p**) Astfel, dacă notăm $e_1 = ax_0$ şi $e_2 = x_0a$, atunci

$$\begin{aligned} e_1g &= (ax_0)(axa) = (ax_0a)(xa) = axa = g \\ ge_2 &= (axa)(x_0a) = (ax)(ax_0a) = axa = g \end{aligned}$$

de unde obţinem că $e_1 = e_1e_2 = e_2 \stackrel{not.}{=} e$ este elementul neutru. (**2 p**)
Dacă g este un element arbitrar din G, atunci pentru (e,g,e) şi (g,e,e) din G^3, există elementele $g_1, g_2 \in G$, astfel încât $eg_1g = gg_2e = e$, adică $g_1g = gg_2 = e$. Cum $g_1 = g_1e = g_1(gg_2) = (g_1g)g_2 = eg_2 = g_2$, rezultă că $g_1 = g_2 \stackrel{not.}{=} g^{-1}$ este inversul lui g. (**3 p**)

Problema 4. Pentru orice subgrup H al unui grup abelian $(G,\cdot)$, notăm cu $\widetilde{H}$ mulţimea

$$\widetilde{H} = \{x \in G : \exists\, n \in \mathbb{N}^*, \text{ astfel încât } x^n \in H\}.$$

a) Să se arate că $\widetilde{H}$ este un subgrup al lui G, care-l conţine pe H;

b) Să se arate că dacă H_1 şi H_2 sunt două subgrupuri finite ale lui G, atunci $\widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_2$;

c) Dacă $(G,\cdot) = (\mathbb{C}^*,\cdot)$, iar H este un subgrup finit al lui G, să se determine subgrupul $\widetilde{H}$.

Marcel Ţena

Rezolvare. *a*) Incluziunea $H \subseteq \widetilde{H}$ este evidentă.
Dacă $x,y \in \widetilde{H}$, atunci există numerele naturale $m,n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x^m, y^n \in H$. Deoarece,

$$\left(x \cdot y^{-1}\right)^{mn} = (x^m)^n \cdot ((y^n)^m)^{-1} \in H \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H,$$

obţinem că $\widetilde{H} \le G$. (**3 p**)
b) Fie H_1 şi H_2 două subgrupuri finite ale lui G. Dacă $x \in \widetilde{H}_1$, atunci $x^n \in H_1$ pentru un număr natural n, de unde rezultă că $x^{n\cdot|H_1|} = (x^n)^{|H_1|} = e \in H_2$, adică $x \in \widetilde{H}_2$. Aşadar, $\widetilde{H}_1 \subseteq \widetilde{H}_2$. Analog, se obţine $\widetilde{H}_2 \subseteq \widetilde{H}_1$, deci $\widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_2$. (**2 p**)
c) Dacă H este un subgrup finit de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ al grupului $(\mathbb{C}^*,\cdot)$, atunci $H = U_n$, unde $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\}$ este grupul rădăcinilor de ordinul n ale unităţii. (**1 p**) Astfel, pe baza punctului *b*), avem:

$$\widetilde{H} = \widetilde{U}_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } z^n = 1\} = \{\cos\alpha\pi + i\sin\alpha\pi : \alpha \in \mathbb{Q}\}. \qquad (\mathbf{1\ p})$$