INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

Concursul de Matematică „Gheorghe S. Nadiu”

Ediţia a III - a, 7. 12. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

Problema 1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale, care verifică relaţia

$$x_n^2 - x_n \cdot x_{n+1} - \frac{1}{n} \geq 0, \quad \forall\ n \geq 1.$$

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq 0.$

* * *

Rezolvare. Presupunem contrariul, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$. Rezultă de aici că există un $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x_n > 0$, $\forall\ n \geq n_0$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $n_0 = 1$. (**1p**)
Astfel, din ipoteză, pentru orice $n \geq 1$, avem:

$$x_n \cdot (x_n - x_{n+1}) \geq \frac{1}{n} \Rightarrow x_n - x_{n+1} > 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \qquad (\mathbf{1p})$$

Aşadar, dacă notăm $x_1 = a \in (0, +\infty)$, deoarece $x_n \leq a$, pentru orice $n \geq 1$, obţinem

$$a \cdot (x_n - x_{n+1}) \geq x_n \cdot (x_n - x_{n+1}) \geq \frac{1}{n} \qquad (\mathbf{2p})$$

de unde

$$a \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \Rightarrow a\,(a - x_n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}. \qquad (\mathbf{2p})$$

Trecând la limită în ultima inegalitate, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} a\,(a - x_n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

ceea ce contrazice presupunerea că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0.$ (**1p**)

Problema 2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 \in (0, +\infty)$ şi

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \ln x_{n+1}, \quad \forall\ n \geq 1.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$.

G.M. 11/2016

Rezolvare. Inductiv se arată că $x_n \in (0, +\infty)$, pentru orice $n \geq 1$. (**1p**)
Din ipoteză, obţinem că pentru orice $n \geq 1$, are loc

$$x_n = \ln x_{n+1} - \ln x_n \Leftrightarrow x_n = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} \qquad (\mathbf{2p})$$

Aşadar,

$$\ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = x_n > 0 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n,$$

adică şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. $(\mathbf{1p})$. Cum orice şir strict monoton are limită, obţinem că $\lim_{n\to\infty} x_n \in (0,+\infty)\cup\{+\infty\}$. Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \in (0,+\infty)$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{x_{n+1}}{x_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$, ceea ce nu convine. Deci $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. $\quad(\mathbf{1p})$

Deoarece $x_n = \ln\frac{x_{n+1}}{x_n} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n}$, obţinem că $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = e.$ $\quad(\mathbf{2p})$

Problema 3. Fie matricele $A,B,C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu $A+B+C+I_n=O_n$. Să se arate că

$$\det\left[(AB-C)(BC-A)(CA-B)\right]\geq 0.$$

Nicolae Muşuroaia

Rezolvare. Din $A+B+C+I_n=O_n$, avem

$$AB-C=-(B+C+I_n)\cdot B-C=-(B+C)\cdot(B+I_n)=(B+C)\cdot(A+C)\qquad(\mathbf{2p})$$

de unde obţinem că $\det(AB-C)=\det(B+C)\cdot\det(A+C)$. $\quad(\mathbf{1p})$

Analog, se arată că

$$\begin{aligned} BC-A &= (C+A)(B+A)\Rightarrow\det(BC-A)=\det(C+A)\cdot\det(B+A) &&(\mathbf{1p})\\ CA-B &= (A+B)(C+B)\Rightarrow\det(CA-B)=\det(A+B)\cdot\det(C+B) &&(\mathbf{1p})\end{aligned}$$

Din cele de mai sus, rezultă că

$$\det\left[(AB-C)(BC-A)(CA-B)\right]=\left[\det(A+B)\cdot\det(A+C)\cdot\det(B+C)\right]^2\geq 0.\qquad(\mathbf{2p})$$

Problema 4. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}=\{(A,B)\in GL_2(\mathbb{R})\times GL_2(\mathbb{R}):AB+BA=I_2\}$, unde $GL_2(\mathbb{R})$ este mulţimea matricelor nesingulare din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că:

$a)$ mulţimea $\mathcal{M}$ are o infinitate de elemente;

$b)$ dacă $A,B\in\mathcal{M}$, atunci $AB^2A=BA^2B=\det(AB)\cdot I_2$.

Traian Tămîian

Rezolvare. $a)$ De exemplu, $\left(a\cdot I_2,\frac{1}{2a}\cdot I_2\right)\in\mathcal{M},\ \forall\, a\in\mathbb{R}^*$, de unde rezultă concluzia. $\quad(\mathbf{2\ p})$

$b)$ Deoarece $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$, din $AB+BA=I_2$, obţinem că $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)=1$. $\quad(\mathbf{1\ p})$

Din Teorema Hamilton $-$ Cayley, avem

$$(AB)^2-AB+\det(AB)\cdot I_2=O_2\quad\text{şi}\quad(BA)^2-BA+\det(BA)\cdot I_2=O_2\quad(\mathbf{1\ p}).$$

Obţinem de aici că

$$\begin{aligned}&(AB)^2+(BA)^2-(AB+BA)+2\det(AB)\cdot I_2=O_2\\ &\Rightarrow(AB+BA)^2-(AB^2A+BA^2B)-(AB+BA)+2\det(AB)\cdot I_2=O_2\\ &\Rightarrow I_2-(AB^2A+BA^2B)-I_2+2\det(AB)\cdot I_2=O_2\\ &\Rightarrow AB^2A+BA^2B=2\det(AB)\cdot I_2\qquad(\mathbf{1\ p})\end{aligned}$$

respectiv,

$$\begin{aligned}&(AB)^2-(BA)^2-(AB-BA)=O_2\\ &\Rightarrow(AB+BA)(AB-BA)+(AB^2A-BA^2B)-(AB-BA)=O_2\\ &\Rightarrow(AB-BA)+(AB^2A-BA^2B)-(AB-BA)=O_2\\ &\Rightarrow AB^2A-BA^2B=O_2\qquad(\mathbf{1\ p})\end{aligned}$$

Aşadar, din $AB^2A+BA^2B=2\det(AB)\cdot I_2$ şi $AB^2A-BA^2B=O_2$, rezultă că

$$AB^2A=BA^2B=\det(AB)\cdot I_2.\qquad(\mathbf{1\ p})$$