Concursul de Matematică „Gheorghe S. Nadiu”

Ediţia a III - a, 7. 12. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

Problema 1. *i*). Demonstraţi inegalitatea

$$\log_{2019} 2018 < \log_{2020} 2019.$$

ii). Să se arate că

$$\sqrt{a\log_{a+b+c}\sqrt[3]{3a}}+\sqrt{b\log_{a+b+c}\sqrt[3]{3b}}+\sqrt{c\log_{a+b+c}\sqrt[3]{3c}}\le\sqrt{a+b+c},\ \forall\ a,b,c\in\left(\frac{1}{3},\infty\right).$$

Soluţie

i). $\log_{2019} 2018 < \log_{2020} 2019 \Leftrightarrow \frac{\lg 2018}{\lg 2019} < \frac{\lg 2019}{\lg 2020} \Leftrightarrow \lg 2018 \cdot \lg 2020 < \lg^2 2019$

$\sqrt{\lg 2018 \cdot \lg 2020} < \frac{\lg 2018+\lg 2020}{2} = \lg\sqrt{2018 \cdot 2020} < \lg 2019$ **3p**

ii). CBS $\sqrt{a\log_{a+b+c}\sqrt[3]{3a}}+\sqrt{b\log_{a+b+c}\sqrt[3]{3b}}+\sqrt{c\log_{a+b+c}\sqrt[3]{3c}}\le$

$\le \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{\log_{a+b+c}\sqrt[3]{3a}+\log_{a+b+c}\sqrt[3]{3b}+\log_{a+b+c}\sqrt[3]{3c}} =$

$\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{\log_{a+b+c}\sqrt[3]{27abc}}$

E suficient să demonstrăm că $\log_{a+b+c} 3\sqrt[3]{abc} \le 1$; rezultă din $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$. **4p**

Problema 2. *i*). Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{Q}$ şi $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q}$, atunci există $x, y \in \mathbf{Q}$ astfel încât $a = x^2, b = y^3$.

ii). Să se arate că $\sqrt{n+2}+\sqrt[3]{3n} \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

Soluţie

i). Fie $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b} = r \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{b} = r-\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a}(3r^2+a) = r^3+3ar-b$.

Dacă $a = -3r^2$, din $a \ge 0$ avem $a = 0$ şi $b = r^3$.

Dacă $a \ne -3r^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{r^3+3ar-b}{3r^2+a} = x$

$\Rightarrow a = x^2$ şi $\sqrt[3]{b} = r-x = y \in \mathbf{Q} \Rightarrow b = y^3$. **4p**

ii). Presupunem $\sqrt{n+2}+\sqrt[3]{3n} \in \mathbf{Q}$; din *i*) rezultă $n+2 = x^2$, $3n = y^3$, $x, y \in \mathbf{Z}$.

$3|y \Rightarrow y = 3z$ şi $x^2 = 9z^3+2$; avem $x^2 \ne M_3+2$. **3p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi neobtuzunghic în care

$$AH^2 + BH^2 + CH^2 = 4R^2,$$

unde H este ortocentrul, iar R raza cercului circumscris. Arătaţi că triunghiul este dreptunghic.

Soluţie. Alegem originea planului în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. Notăm $A(a), B(b), C(c), H(h)$. **1p**

Avem $|a| = |b| = |c| = R$, $\overline{a} = \frac{R^2}{a}, \overline{b} = \frac{R^2}{b}, \overline{c} = \frac{R^2}{c}$ şi $h = a + b + c$. **2p**

$AH^2 + BH^2 + CH^2 = 4R^2 \Leftrightarrow (h-a)(\overline{h}-\overline{a}) + (h-b)(\overline{h}-\overline{b}) + (h-c)(\overline{h}-\overline{c}) = 4R^2$

$\Leftrightarrow (b+c)(\overline{b}+\overline{c}) + (a+c)(\overline{a}+\overline{c}) + (a+b)(\overline{a}+\overline{b}) = 4R^2$

$\Leftrightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = 0$ **3p**

$\Leftrightarrow$ două vârfuri sunt diametral opuse. **1p**

Problema 4. Să se arate că dacă pentru $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ avem $z^n + nz + a = 0$ unde $a \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $|z| \geq 1$.

Soluţie

Din $z^n + nz + a = 0$ şi $\overline{z}^n + n\overline{z} + a = 0$ obţinem $z^n - \overline{z}^n = -n(z - \overline{z})$ **3p**

$z \neq \overline{z}$ deci $-n = z^{n-1} + z^{n-2}\overline{z} + \cdots + z\overline{z}^{n-2} + \overline{z}^{n-1}$

$\Rightarrow n = |z^{n-1} + z^{n-2}\overline{z} + \cdots + z\overline{z}^{n-2} + \overline{z}^{n-1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |z|^{k-1}$ **3p**

Din $n \leq n|z|^{n-1}$ obţinem $|z| \geq 1$. **1p**